

# Focalización de ondas mediante el método de inversión temporal en una cavidad 2D

Gianni Boschetti

Instituto de Física  
Facultad de Ciencias  
UDELAR

Montevideo, Uruguay

gianni04101999@gmail.com

Santiago Cabrera

Instituto de Física  
Facultad de Ciencias  
UDELAR

Montevideo, Uruguay

santidanubio@gmail.com

Noelia Olivera

Instituto de Física  
Facultad de Ciencias  
UDELAR

Montevideo, Uruguay

noeliaoliverarodriguez@gmail.com

Nicolás Pan

Instituto de Física  
Facultad de Ciencias  
UDELAR

Montevideo, Uruguay

nicolaspan.op@gmail.com

**Resumen**—En este trabajo estudiamos la focalización de un campo escalar en una cavidad bidimensional, empleando el método de inversión temporal. Dicho método es de sencilla aplicación y no requiere de disposiciones especiales de emisores ni de desfases específicos entre estos. Esto resulta de interés pues la focalización de ondas tiene gran utilidad en medicina, por ejemplo en tratamientos oncológicos. En concreto, realizamos simulaciones por diferencias finitas del procedimiento, buscando mejorar la calidad de focalización por medio del análisis de factores presentes tales como los tiempos característicos del método, la geometría de la cavidad o la disposición de los sensores utilizados. Llegamos a un conjunto de conclusiones que nos permiten dar una cierta configuración de los distintos parámetros regulables del problema, de forma tal que se maximiza la calidad de focalización. Al mismo tiempo, destacamos que con dicha configuración optimizamos la relación costo-beneficio del método. En base a estos resultados es plausible proceder a realizar estudios en cavidades tridimensionales con posibles aplicaciones experimentales sobre medios reales.

## I. INTRODUCCIÓN

El impacto que la física tiene en las distintas áreas del conocimiento es extremadamente amplio. Un ejemplo claro es la medicina; ya hacia finales del siglo XIX ocurrió la primera gran revolución en la medicina gracias a estudios físicos del momento. Una popular historia cuenta como el 8 de noviembre de 1885, Wilhem Röntgen <sup>1</sup> tomó la primer radiografía de la historia mientras investigaba el poder de penetración de las emisiones de los tubos de rayos catódicos[1]. Mientras investigaba con estos rayos, el físico se percató que algunos materiales tales como el papel o el cartón permitían su paso, mientras que otros como el plomo no. Así, hizo incidir un haz de lo que ahora conocemos como rayos X sobre la mano de su esposa, y logró observar, por primera vez en la historia, una radiografía donde se podían ver claramente sus huesos. Al año siguiente de este descubrimiento, Röntgen aplicó esta técnica para observar una fractura de brazo. Publicó sus resultados en una revista médica llamada *British medical journal* y las placas se popularizaron rápidamente. De esta manera llegamos al día de hoy, donde las radiografías son un procedimiento común en medicina.

<sup>1</sup>Ingeniero y físico alemán, ganador del premio Nobel en 1901 por el descubrimiento de los rayos X

Aportes como este existen varios, provenientes de muchas áreas de interés de la física. Algunas de estas tecnologías, que se han puesto al servicio de la medicina, son las resonancias magnéticas (electromagnetismo), los tratamientos radiológicos (física nuclear) y las ecografías (acústica ultrasonora). Ninguna de estas técnicas sería posible sin un entendimiento de la física de fondo. En particular, la física acústica juega un papel importante en diversos aparatos y tratamientos. Uno de ellos es el llamado ultrasonido focalizado de alta intensidad, HIFU[2], un tratamiento que busca aniquilar células en tumores mediante la focalización de ondas acústicas de alta intensidad. Sin entrar en detalle, la idea detrás de este procedimiento es transmitir, mediante las ondas que actúan de vehículo, energía a las células cancerígenas, provocando que estas aumenten su temperatura, eventualmente causando la necrosis celular. La clave de estos tratamientos es lograr que las ondas focalicen únicamente en la región objetivo; de esta manera evitamos dañar tejidos colindantes al tumor que se encuentran sanos.

Inspirados en la utilidad de la focalización de ondas, en este trabajo presentamos el estudio de uno de los métodos existentes para lograr este objetivo: la inversión temporal.

### I-A. Inversión temporal de ondas

Supongamos que en una cierta región del espacio se verifica la ecuación de ondas linealizada para algún campo escalar  $\Phi$ - que podemos suponer es el de sobrepresión acústica por ejemplo:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

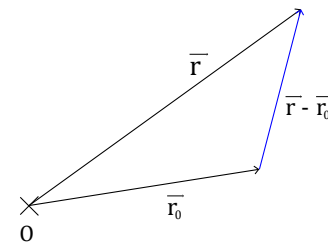


Figura 1: Esquema de las posiciones de la fuente,  $\vec{r}_0$  y el sensor  $\vec{r}$ .

Notamos que por la estructura de la ecuación, esta es invariante al cambio  $t \rightarrow -t$ , esto es, las soluciones divergentes a la ecuación tienen una contraparte convergente que también es solución. Esta es una de las características principales que nos permiten utilizar el método.

Debido a la linealidad de la ecuación de ondas (1), sacaremos provecho de la teoría de sistemas lineales y en particular, de las funciones de Green. Supongamos que disponemos de una fuente y un sensor, ubicados en  $\vec{r}_0$  y  $\vec{r}$  respectivamente, ver figura 1. Sea  $g(\vec{r}, \vec{r}_0, t)$  la función de Green del problema; esto es, la respuesta del sistema a una emisión impulsional de la fuente (que es a su vez puntual) que expresamos de la forma  $f(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)\delta(t)$ . Si ahora, la fuente emite una cierta señal de la forma  $e(t)$ , la respuesta del sistema puede ser escrita mediante un producto de convulsión temporal:

$$\phi(\vec{r}, t) = e(t) \otimes g(\vec{r}, \vec{r}_0, t) \quad (2)$$

La técnica se compone de dos grandes etapas, la primera, llamada de emisión y la segunda, de inversión temporal. En la primera, una fuente ubicada en la posición donde finalmente deseamos focalizar el campo emite una señal muy breve en el tiempo. Gracias a la potencia de la función de Green, y como vemos en la ecuación 2, alcanza con conocer la señal  $e(t)$  para conocer todo el campo escalar. Supongamos que en  $\vec{r}$  registramos el valor que adquiere el campo en función del tiempo durante un cierto tiempo  $T$ . Ahora podemos emitir desde la posición  $\vec{r}$  el campo registrado, esto provocará una nueva respuesta del medio que podemos llamar  $\phi_{IT}(\vec{r}, t)$  - campo de inversión temporal. Podemos calcular dicho campo en cualquier punto de la superficie tomando nuevamente el producto de convulsión con la función de Green. Además, considerando que para ondas acústicas vale el principio de reciprocidad<sup>2</sup> tenemos lo siguiente [3]:

$$\phi_{IT}(\vec{r}^T, t) = e(-t) \otimes g(\vec{r}_0, \vec{r}, -t) \otimes g(\vec{r}^T, \vec{r}, t) \quad (3)$$

Tomando la transformada de Fourier de la expresión (3) vemos que:

$$\tilde{\phi}_{IT}(\vec{r}^T, \omega) = E^*(\omega)G^*(\vec{r}_0, \vec{r}, \omega)G(\vec{r}^T, \vec{r}, \omega) \quad (4)$$

donde el asterisco representa el conjugado complejo. Si cada componente frecuencial de la función de Green puede ser escrita de la forma  $G(\vec{r}_a, \vec{r}_b, \omega) = A(|\vec{r}_a - \vec{r}|, \omega)e^{i\omega t}e^{i\zeta(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|)}$  la ecuación (4) se transforma en:

$$\phi_{IT}(\vec{r}^T, \omega) = E^*(\omega)A^*(|\vec{r}_0 - \vec{r}|, \omega)A(|\vec{r}^T - \vec{r}|, \omega)e^{i\Delta\zeta(\vec{r}^T, \vec{r}, \omega)} \quad (5)$$

en donde  $\Delta\zeta(\vec{r}^T, \vec{r}, \omega) = \zeta(|\vec{r}_0 - \vec{r}|, \omega) - \zeta(|\vec{r}^T - \vec{r}|, \omega)$ .

De esta manera, podemos ver que si el punto  $\vec{r}^T$  del campo de inversión temporal coincide con el punto donde originalmente se encontraba la fuente  $\vec{r}_0$  entonces  $\Delta\zeta = 0$ . En

<sup>2</sup>De forma sintética e informal, implica que el campo generado por una fuente en  $\vec{r}_a$  y medido en una posición  $\vec{r}_b$  sería el mismo que mediríamos si se intercambiasen  $\vec{r}_a$  con  $\vec{r}_b$

este caso, la expresión para el campo de inversión temporal queda de la forma:

$$\phi_{IT}(\vec{r}^T, \omega) = E^*(\omega)A^2(\omega) \quad (6)$$

Así podemos ver que el efecto de la inversión temporal es que el campo se coloque en fase en el punto inicial. Esto quiere decir que todas las ondas transmitidas por la superficie, tanto las que llegan de forma directa desde el sensor al punto de focalización como las reflejadas en bordes, interfieren de forma constructiva en el punto donde originalmente estaba la fuente. Esto genera que las amplitudes de dichas ondas se sumen, generando un valor máximo para el campo en ese punto, este fenómeno lo llamamos focalización por inversión temporal y es el mecanismo básico en el que se basa todo nuestro estudio.

De la expresión (6), podemos ver que el campo de inversión en función del tiempo en el punto de focalización, que se obtiene aplicando la transformada inversa a la expresión, conserva la forma del impulso inicial  $e(t)$ , si el ancho de banda del espectro  $A(\omega)$  es importante. Por ende, si además de una focalización espacial deseamos obtener una focalización temporal, lo óptimo es que la emisión inicial sea breve temporalmente. Por otro lado, de la expresión (I-A) podemos ver que el ancho del espectro de la señal inicial también aporta para la focalización espacial. Si la señal es por ejemplo armónica, hay presente una única frecuencia y por ende la diferencia de fase en las vecindades del punto de focalización depende exclusivamente de la diferencia de caminos recorrida por las ondas directas y reflejadas, luego el decaimiento de la amplitud del campo es suave. Si en cambio el pulso inicial es breve, y tenemos varias frecuencias presentes, la diferencia de fase de cada frecuencia permite una caída más rápida del campo. Notamos que la focalización espacial mejora entonces si la diferencia de caminos que recorren las ondas directas y reflejadas es "aleatoria". Con este propósito, nos es deseable adquirir el campo en sensor un tiempo  $T$  largo, de forma de incluir tanto la onda directa proveniente de la fuente como ondas reflejadas en los bordes y otras homogeneidades que puedan haber en el medio. Resulta entonces que la presencia de irregularidades en la geometría de la cavidad donde se realice el procedimiento, así como la existencia de diferentes medios que generen ondas reflejadas y transmitidas con ángulos alterados benefician el proceso de focalización.

### I-B. Espejo de inversión temporal

En la sección anterior discutimos como, registrando el campo en un sensor puntual, podemos lograr una focalización en un punto determinado. Podemos extender la idea a un arreglo lineal de sensores en los que registraremos las señales del campo acústico. A estos arreglos los llamamos "espejos de inversión temporal". Supongamos que colocamos un arreglo lineal de  $N$  sensores, de esta manera gracias a la linealidad del sistema la ecuación 3 se escribe de la forma:

$$\phi_{IT}(\vec{r}^T, t) = e(-t) \otimes \sum_{j=1}^N g(\vec{r}_0, \vec{r}_j, -t) \otimes g(\vec{r}^T, \vec{r}_j, t) \quad (7)$$

Una clara ventaja de utilizar un número mayor de sensores es que la amplitud en el momento de focalización crece linealmente con  $N$ . Se puede demostrar que la relación de amplitud entre el pico de focalización y los lóbulos laterales<sup>3</sup> crece como  $\sqrt{N}$ . Esto se debe, de manera poco rigurosa, a que la amplitud de la señal fuera del punto de focalización podemos asumir que es aproximadamente aleatoria, y por ende al aumentar el número de emisores a  $N$ , dicho ruido crece como  $\sqrt{N}$ .

Además de un arreglo lineal de sensores, debemos de tener en cuenta que también es posible distribuir un conjunto de sensores puntuales de forma aleatoria a lo largo de la cavidad, así como un numero amplio de arreglos lineales. Teóricamente esto no representa problema alguno, pues no asumimos nada sobre las posiciones de los sensores para obtener (7), pero en la práctica puede ser algo complejo de lograr.

### I-C. Ecuación de ondas en un medio no homogéneo

Una de las grandes simplificaciones impuestas sobre la ecuación 1 es que el medio donde estamos resolviendo la ecuación mantenga una densidad homogénea. En la realidad las situaciones son más complicadas, en particular las situaciones en las que la focalización se desea aplicar. Como ejemplo, un modelo muy simplificado de un tumor puede ser una zona de un tejido en la que la densidad del medio cambia; por esta y otras razones puede resultar de interés estudiar que sucede con la ecuación de ondas cuando hay presentes inhomogeneidades. Recordamos además que la presencia de estas no hace sino mejorar la calidad de focalización, por lo que nos es de particular utilidad analizar esta situación.

Supongamos un medio con densidad uniforme  $\rho_0$  y compresibilidad  $\kappa_0$  que contiene una región del espacio con una densidad  $\rho_1$  y una compresibilidad  $\kappa_1$ . Sea  $\rho_e(\vec{r})$  la densidad del fluido en equilibrio<sup>4</sup>. Ahora supongamos que se transmite una onda por el medio con la inhomogeneidad, dicha onda generará una sobrepresión de la forma  $\rho' = \rho - \rho_e$ . Como  $\rho_e(\vec{r})$  no depende del tiempo, podemos escribir la derivada lagrangiana como:

$$\frac{d\rho_e}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\rho_e = 0 \quad (8)$$

Además tenemos la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0 \quad (9)$$

Sustituyendo en esta última la relación  $\rho' = \rho - \rho_e$ , utilizando la ecuación 8 y quedándonos con los términos de primer orden, obtenemos:

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho_e \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (10)$$

Para deducir la ecuación de ondas necesitamos también conocer tanto la ecuación de movimiento como la ecuación de estado. Estas toman la forma:

<sup>3</sup>Se le suele llamar relación señal/ruido

<sup>4</sup>Notemos que depende de la posición donde miramos

$$P' = \frac{\rho'}{\kappa_e \rho_e} \quad (11)$$

$$\rho_e \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla P' \quad (12)$$

Por último, combinando estas 3 ecuaciones de forma conveniente podemos obtener la ecuación de ondas para un medio con densidad no uniforme:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla P'}{\rho_e} \right) - \kappa_e \frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} = 0 \quad (13)$$

Notemos que, como tanto la densidad como la compresibilidad son funciones de  $\vec{r}$ , la velocidad de la onda en el medio dependerá de la posición,  $c = c(\vec{r})$ .

### I-D. Abordaje

El objetivo de nuestro trabajo es analizar distintos componentes que pueden favorecer o desfavorecer la focalización en un punto en concreto. Para ello realizaremos un conjunto de simulaciones numéricas con el método de diferencias finitas, que nos permitan estudiar el fenómeno en una cavidad bidimensional. Nos centramos en analizar factores como la geometría de la cavidad, inhomogeneidades presentes, duración de adquisición de los sensores, duración y forma de la señal original así como el posicionamiento de los sensores. Buscamos encontrar la manera de modificar estos factores de manera tal que nos permitan obtener la mejor focalización posible siempre teniendo en cuenta la posible aplicabilidad de las situaciones en un laboratorio. 13

## II. MÉTODOS

### II-A. Algoritmo de diferencias finitas

Para realizar los estudios que mencionamos previamente, es necesario resolver la ecuación de ondas (13) mediante un método numérico. Para ello, utilizamos el método de diferencias finitas por aproximación central. Este es un método con relativa facilidad de implementación sobre el cual se pueden leer más detalles en nuestro trabajo anterior [4]. En este trabajo incluimos un caso extra a los discutidos en el trabajo previo referenciado, pues el estudio de la ecuación 13 es más general. El algoritmo de diferencias finitas, a partir de un grillado  $(i, j, k)$  - que se obtiene de una partición equiespaciada del tiempo y las dimensiones espaciales - nos permite aproximar el valor del campo en los nodos para un cierto tiempo en función de los valores en el tiempo anterior del mismo y las posiciones colindantes. Elegimos para esta simulación una distancia espacial entre nodos igual en las direcciones  $x$  e  $y$  -  $\Delta x = \Delta y$ . Para nuestro caso, la expresión

para el campo en el nodo espacial  $(i, j)$  para el paso temporal  $k + 1$  está dada por:

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{k+1} = & \left( \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) c_{i,j}^2 [(\phi_{i+1,j}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i-1,j}^k) \\ & + (\phi_{i,j+1}^k - 2\phi_{i,j}^k + \phi_{i,j-1}^k)] + 2\phi_{i,j}^k - \phi_{i,j}^{k-1} \\ & - \left( \frac{\Delta t^2}{4\Delta x^2} \frac{c_{i,j}^2}{\rho_{i,j}} \right) \{ [(\phi_{i+1,j}^k - \phi_{i-1,j}^k)(\rho_{i+1,j} - \rho_{i-1,j})] \\ & + [(\phi_{i,j+1}^k - \phi_{i,j-1}^k)(\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j-1})] \} \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $\rho_{i,j}$  y  $c_{i,j}$  incluyen las características del medio que ahora pueden depender del nodo. Notamos que si son constantes, el último término desaparece y recuperamos la fórmula más familiar para propagación de ondas bidimensionales con diferencias finitas. Destacamos que trabajamos con un campo  $\phi$  genérico, porque si bien utilizamos  $P'$  para deducir (13), los resultados valen para todo campo escalar que la verifique.

Un detalle no menor del algoritmo es respecto a la condición de convergencia de la solución numérica<sup>5</sup>, debido a que la velocidad de la onda propagada por un medio inhomogéneo depende de la posición. Esto hace que para asegurarnos la condición de no divergencia de la solución en toda la cavidad debemos tomar el valor máximo de la velocidad para definir el número de Courant  $\Lambda$  - para una grilla donde el espaciado es igual en  $x$  e  $y$ [5]:

$$\Lambda = \frac{c_{max} \Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (15)$$

## II-B. Proceso de inversión temporal

Una vez que explicamos como funciona nuestro algoritmo para simular la evolución del sistema, explicamos como realizamos el método de inversión temporal para el caso de diferencias finitas. Primeramente determinamos algún tipo de señal inicial  $e(t)$  de unos pocos pasos temporales, que imponemos a la posición de focalización, la “fuente”. Luego permitimos que el sistema evolucione a lo largo de un número importante de iteraciones temporales. Durante este proceso de iteración, almacenamos el valor del campo en la posición del sensor (o los sensores). Posteriormente, “limpiamos” la cavidad, imponiendo un valor nulo en todos los puntos, y comenzamos a emitir la señal que registraron los sensores invirtiendo el tiempo - enviamos primero el último valor registrado, luego el penúltimo, y así sucesivamente. Este método sencillo logra el objetivo de la focalización por inversión temporal, como podemos ver en la figura 2.

Efectivamente notamos que este método logra una focalización para el tiempo invertido  $t = 0$ s. En particular notamos como la señal emitida por el sensor parece generar una respuesta aleatoria en toda la cavidad, 2g, mas para el tiempo de focalización, 2h, se nota una interferencia coherente en el

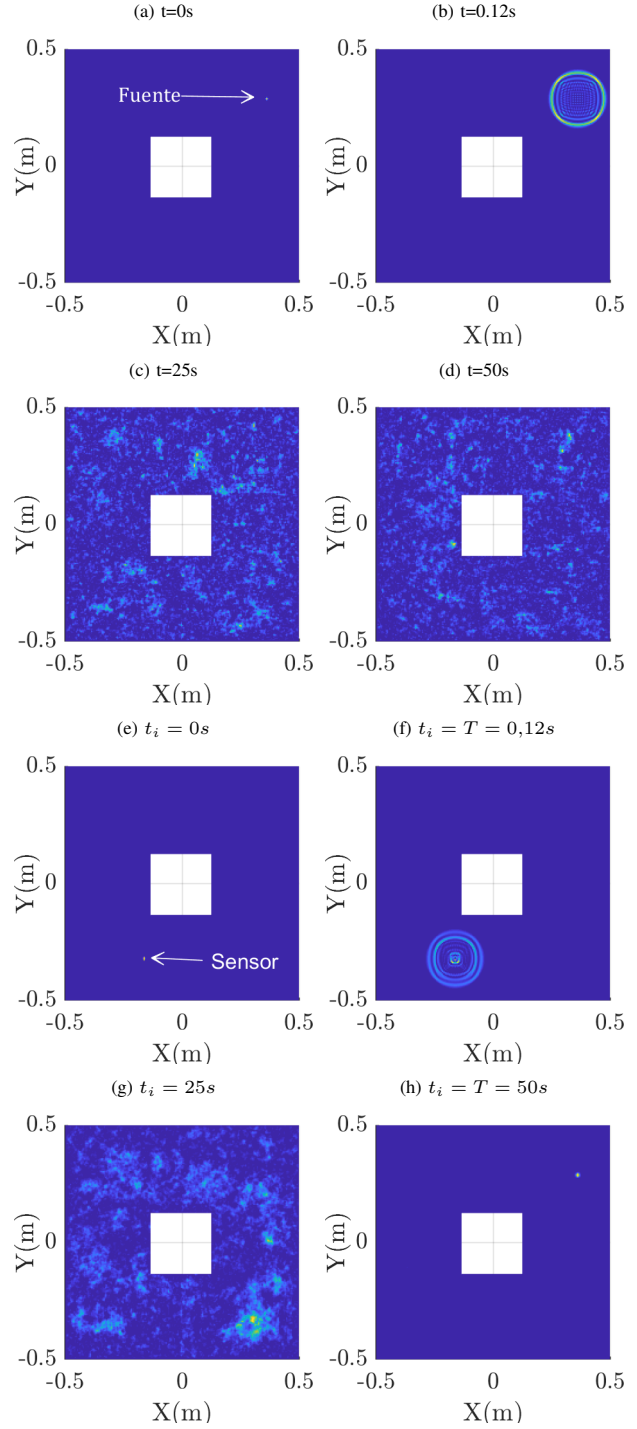


Figura 2: Observamos en las subfiguras a-d la primera fase del proceso de inversión temporal para diferentes tiempos, hasta el tiempo final de adquisición  $t = T = 50$ s. En las subfiguras e-h, observamos la segunda etapa, y en particular notamos que para el tiempo de inversión temporal  $t_i = T = 50$ s la señal se focaliza en la posición inicial de la fuente. En las figuras representamos el cuadrado del campo  $\phi$ , normalizado por su máximo en cada caso. Los tonos claros indican valores mayores.

<sup>5</sup>Condición CFL

punto donde se ubicaba la fuente, con una amplitud mucho mayor que el ruido en los demás puntos. En este trabajo nos centraremos en los aspectos que mejoran la calidad de la focalización, por lo cual dedicamos la siguiente subsección a explicar como mediremos esta.

### II-C. Valores de los parámetros de la simulación

A lo largo del informe realizamos algunas variaciones a las geometrías que empleamos así como a los valores de velocidad de propagación y densidad. De todas formas, en general salvo que indiquemos otra cosa, la cavidad básica que empleamos es un cuadrado de 200 nodos espaciales de lado. La distancia entre nodos es de  $\Delta x = \Delta y = 5 \text{ mm}$  y  $\Delta t = 2.5 \text{ ms}$ . Los valores de velocidad y densidad:  $c = 1 \text{ m s}^{-1}$  y  $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$ . Destacamos que si bien utilizamos estos valores, son completamente arbitrarios y los elegimos para contextualizar un tanto los resultados.

### II-D. Análisis de la calidad de focalización

El principal objetivo de nuestro trabajo es obtener la mejor focalización posible en base a cambios en los parámetros ya mencionados como la geometría de la cavidad o la cantidad de sensores empleada. Para poder comparar dos situaciones de focalización nos basamos en dos criterios principalmente, el ancho focal y la relación entre el lóbulo principal y los picos restantes (también conocida como relación señal/ruido). Para poder calcular estos dos factores, utilizamos el procedimiento explicado a continuación. El campo se focaliza en torno al punto de interés, no solamente en un rango espacial sino que también en uno temporal. Por ello, lo primero determinamos el nodo temporal en el cual la amplitud de la señal en el punto de focalización es máxima. Luego, analizamos la distribución de alturas a lo largo de una dirección tal como se muestra en la figura 3. El procedimiento para analizar la focalización temporal es análogo, solo que en vez de estudiar como varía el campo en el instante donde se da la interferencia constructiva, estudiamos su valor en el foco a lo largo del tiempo.

Para analizar la relación señal ruido, SNR, utilizamos el siguiente criterio. En base a la altura del pico secundario separamos en dos tratamientos, si la altura del pico secundario es al menos un quinto de la altura del lóbulo principal entonces la relación la calculamos como el cociente entre las amplitudes de esos dos lóbulos. Sin embargo, si no se cumple dicha condición entonces determinamos todos los picos secundarios en la señal (es decir, los que no son el principal) y promediamos su valor. Haciendo el cociente entre dicho promedio y la amplitud del pico máximo obtenemos el valor buscado de la SNR. En resumen:

$$SNR = \left( \frac{\phi_{LS}}{\phi_F} \right)^2$$

donde  $\phi_{LS}$  lo calculamos como explicamos según el caso. Cabe resaltar que como nos interesa que los lóbulos secundarios sean lo más pequeños posibles, el valor de la SNR en nuestro trabajo, debe ser lo más pequeño posible. Respecto al ancho focal, utilizamos el criterio de definir el mismo como el ancho que tiene la señal espacial a la mitad de altura del pico.

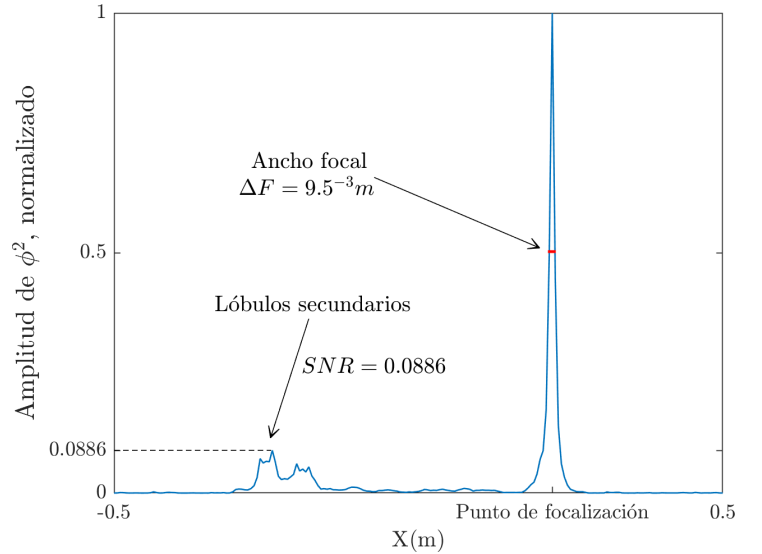


Figura 3: Amplitud del campo al cuadrado en función de la posición en  $x$ . Los datos están a modo de ejemplo para familiarizar al lector sobre los criterios utilizados para determinar la calidad de la focalización en cada caso. Si bien en la gráfica los datos están normalizados por la amplitud del lóbulo principal, para determinar el ancho en general utilizamos los datos sin normalizar.

Ambas cualidades de una focalización las podemos observar en el ejemplo que presentamos en la figura 3.

## III. FACTORES ESTUDIADOS

### III-A. Tiempo de adquisición $T$

Suponiendo que es imposible, por carencia de medios adecuados por ejemplo, emitir una señal inicial de gran amplitud, o sencillamente con el fin de obtener una focalización mayor o menor tanto espacial como temporalmente, como mencionamos en I un parámetro crítico es el tiempo  $T$  durante el cual el espejo de inversión temporal registra el valor del campo para luego ser invertido temporalmente.

De forma teórica, esperamos que el crecimiento del valor del campo en la posición e instante de focalización crezca de forma lineal con el tiempo de adquisición, mientras que el valor de los lóbulos secundarios temporales en la posición de focalización, deberían crecer como  $\sqrt{(T)}$  [6], para tiempos de adquisición no demasiado largos. Profundizaremos en las explicaciones de estas afirmaciones. Primero, analizamos los datos que obtenemos. En concreto, el proceso de medición que realizamos consistió en registrar la calidad de focalización para varios tiempos de adquisición, de entre  $t = 12.5 \text{ s}$  y  $50 \text{ s}$ , en la cavidad toroidal cuadrada, para que no se establezcan modos normales en el tiempo de estudio. Presentamos los resultados en la figura 4.

Como apreciamos en las primeras gráficas de la figura 4 el crecimiento del pico de focalización y el de los lóbulos secundarios se ajusta a curvas proporcionales a  $T$  y  $\sqrt{T}$  respectivamente, con coeficientes  $r^2 = 0,987$  y  $r^2 = 0,937$  en cada caso. Podemos entender este fenómeno, de forma poco rigurosa, pensando que al aumentar el tiempo de medida  $T$ , el sensor recibe más ondas independientes, provenientes de

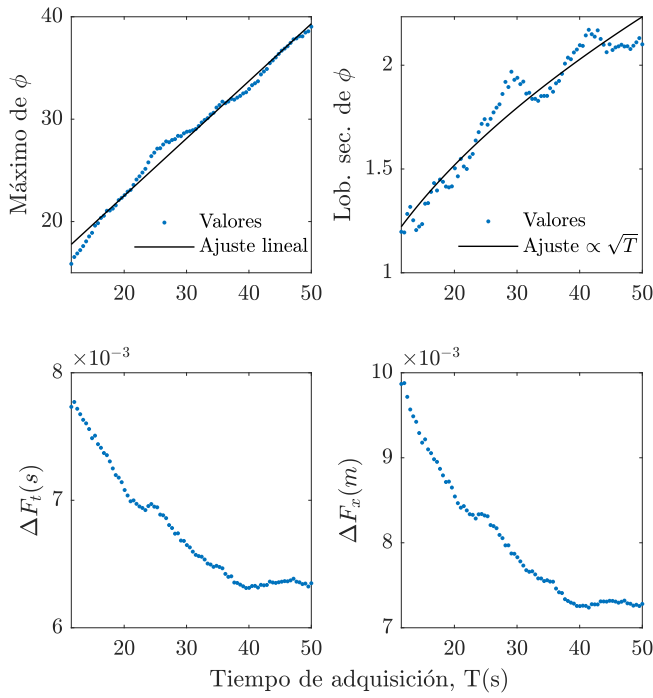


Figura 4: Representamos los resultados obtenidos para la cavidad cuadrada a medida que aumentamos el tiempo de adquisición. Para los valores máximos y lóbulos secundarios, superponemos ajustes de acuerdo a predicciones teóricas.

reflexiones con bordes, que luego reenvía en todas direcciones. Algunas de estas ondas emitidas recorren exactamente el mismo camino que tomaron para llegar al sensor, pero recorrido en sentido contrario, e interfieren constructivamente en el punto de focalización en  $t = T$  - aumentando así el pico de focalización de forma proporcional a  $T$ . Por otro lado, al emitir el sensor en todas direcciones, existen ondas que no provienen de la situación inicial que pueden llegar igualmente al punto de focalización, mas su interferencia es aproximadamente aleatoria, lo que explica el crecimiento como  $\sqrt{T}$ . Esto de alguna forma justifica lo que observamos, para tiempos de adquisición de hasta 50s. Por otro lado, de las gráficas del ancho focal en la figura 4, notamos que este disminuye inicialmente y luego se estabiliza tanto espacial como temporalmente. No colocamos un gráfico con el crecimiento de los lóbulos secundarios espaciales, que es menos suave que el caso temporal, pero de forma similar. Dados los resultados que obtenemos para el pico y los lóbulos secundarios del campo, podemos concluir que la relación SNR, para la intensidad del campo, crece de forma proporcional a  $T \left( \left( \frac{T}{\sqrt{T}} \right)^2 \right)$ .

Destacamos de estos resultados que sin hacer otra cosa que registrar por un tiempo mayor, logramos una mayor intensidad de focalización, sin tener que emitir un pulso inicial más amplio ni colocar más sensores. Ahora bien, es razonable preguntarse - puesto que adquirir por más tiempo requiere mayor costo operativo, de memoria, y en el caso de experimentos requiere de una situación que debe permanecer controlada durante un período más largo- ¿mejora indefinidamente la

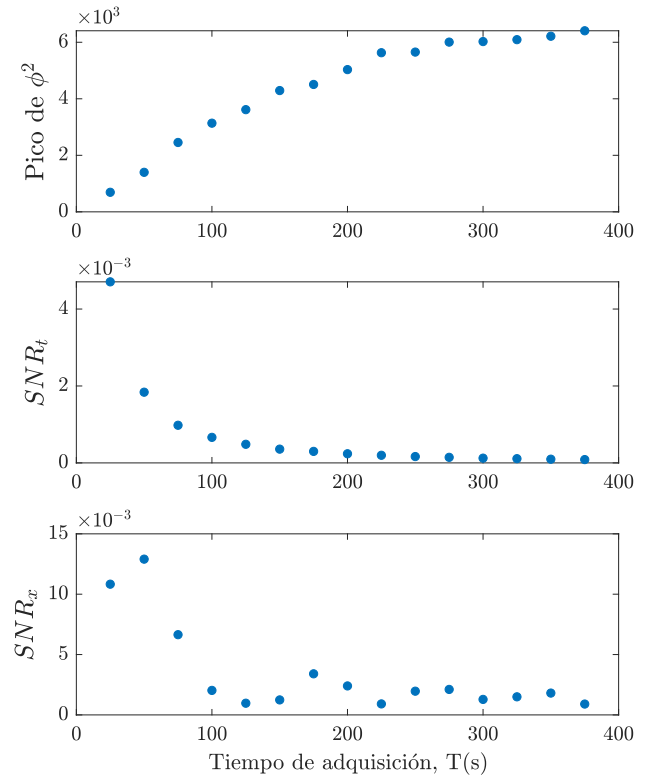


Figura 5: Resultados obtenidos para la cavidad con forma de toro cuadrado, para tiempos de adquisición largos. Notamos como tanto la amplitud máxima como la relación SNR dejan de mejorar para tiempos muy largos.

relación SNR y la amplitud de focalización a medida que aumentamos el tiempo de adquisición? Estudiamos que sucede para tiempos en el intervalo  $[25s, 375s]$  y representamos lo registrado en la figura 5. Podemos ver que tanto la amplitud del pico como la relación SNR - espacial y temporal - dejan de mejorar. Debido a la discretización que utilizamos, así como el hecho de que la cavidad que trabajamos - geometría A en la figura 7 - por defecto no presentan propiedades caóticas, llega un momento donde el sensor deja de recibir nueva información; ya no adquiere información sobre nuevas ondas independientes. Esto implica que la calidad de focalización para tiempos largos, y en particular el valor del pico de focalización deja de crecer, pues el sensor deja de recibir ondas independientes que puedan sumarse de forma coherente en el punto de interés y de forma aleatoria en los alrededores. Esto explica lo que observamos en la figura 5, donde el valor máximo de  $\phi^2$  tiende asintóticamente a un valor. En pruebas con otras geometrías sencillas observamos el mismo fenómeno. Por lo tanto concluimos que asociado a las propiedades geométricas de una cavidad, existe un tiempo característico después del cual no hay más información para recabar y el aumento del tiempo de adquisición deja de ser rentable como método para reducir la SNR o aumentar la intensidad de focalización. Para corroborar la dependencia de dicho tiempo característico con la geometría de la cavidad, comparamos los resultados obtenidos para una cavidad de las que empleamos a lo largo de este apartado, un toro cuadrado, con una que



presenta, al menos teóricamente, propiedades ergódicas: el estadio de Bunimovich [7] - un rectángulo con semicírculos en dos de sus caras opuestas, que corresponde a la geometría B en la figura 7. Estudiamos la amplitud de focalización de  $\phi^2$ , para un tiempo máximo de observación de 150000 pasos temporales, que en nuestra simulación corresponde a  $t = 375$  s. En la figura 6, representamos los resultados que obtuvimos y los comparamos con los que teníamos para el toro cuadrado.

Podemos apreciar como en el caso del toro cuadrado el pico de focalización deja de aumentar significativamente después de aproximadamente  $T = 250$  s, mientras que la geometría caótica sigue aumentando, aunque más lentamente. Que el crecimiento se reduzca para el segundo caso lo asociamos a que, al discretizar el espacio y estar calculando una solución aproximada del problema, no estemos realmente obteniendo un comportamiento caótico que haga tender a infinito el tiempo en que se deja de recibir información. En cambio, existe un cierto tiempo, mayor que para la cavidad cuadrada, en el cual también dejará de crecer la amplitud del foco en el instante de focalización. No realizamos estudios para tiempos aún mayores por limitaciones de equipo, tan solo verificamos que para un tiempo de adquisición de 250000 pasos temporales, unos 625 s, la amplitud de la intensidad en el punto de focalización, respecto al valor máximo medido en el estudio (con  $T = 375$  s) aumentó en un 1,44 % para la cavidad con forma toroidal, mientras que para la cavidad que simula el estadio de Bunimovich, el aumento fue de un 14,51 %. Esto apoya nuestras suposiciones, y muestra que el tiempo característico para la segunda geometría, si bien no es infinito, es bastante mayor que para la cavidad cuadrada. De cualquier modo, en la práctica, ya sea por imposiciones de la situación o por imperfecciones de la geometría, no es esperable un comportamiento caótico y por ende concluimos que existe un tiempo máximo de adquisición tras el cual deja de aumentar el valor del pico de focalización.

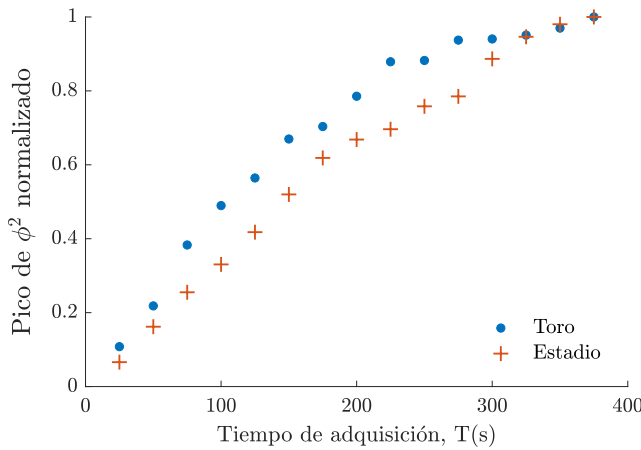


Figura 6: Máximo valor de  $\phi^2$  observado en el punto de focalización, en función del tiempo de adquisición para dos geometrías. Se encuentra dividido por el valor máximo alcanzado por cada curva en  $T = 375$  s para poder comparar ambas series de datos.

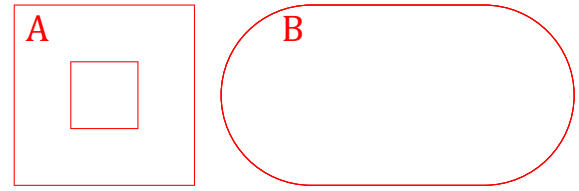


Figura 7: Diagramas de las cavidades que utilizamos para analizar la influencia del tiempo de adquisición T.

### III-B. Impulso inicial

Puesto que la expresión del campo de inversión temporal depende de la transformada de Fourier de la señal inicial  $e(t)$  que emite la fuente en el punto a focalizar, como vemos en (I-A), esperamos que utilizar diferentes formas funcionales para la señal  $e(t)$  emitida desde el punto de focalización juegue un rol en la calidad de la focalización. Con el propósito de corroborar este fenómeno, así como de hallar que tipo de pulso inicial es óptimo, analizamos cuatro tipos de señales iniciales, que consideramos son relativamente sencillas de reproducir en experiencias reales:

1. Paquete gaussiano - PG
2. Ventana rectangular - VR
3. Ventana triangular - VT
4. Medio ciclo de senoide - CS

Fijamos todas con el mismo soporte temporal - unos 7 nodos temporales en nuestra grilla de diferencias finitas, unos 17 ms - y de forma tal que su valor promedio fuera similar. Adquirimos datos en idénticas disposiciones de fuente y sensor, durante un tiempo de 25 s - unos 20000 nodos temporales - Comparamos la calidad de la focalización obtenida en la tabla I

$e(t)$	$SNR_t$	$\Delta F_t$ (ms)	$SNR_x$	$\Delta F_x$ (mm)
PG	0.0025	$6.9 \pm 1.3$	0.0051	$10.7 \pm 2.5$
VR	0.0039	$10.7 \pm 1.3$	0.0086	$15.9 \pm 2.5$
VT	0.0029	$7.7 \pm 1.3$	0.0060	$11.9 \pm 2.5$
CS	0.0021	$6.6 \pm 1.3$	0.0043	$8.9 \pm 2.5$

Tabla I: Valores para el ancho focal  $\Delta F$  así como la relación SNR para la intensidad del campo, tanto espacial como temporalmente, para diferentes señales iniciales  $e(t)$ .

En base a los parámetros que utilizamos para medir que tan buena es la focalización obtenida, en principio parecería ser óptimo el medio ciclo de senoide, de entre las cuatro señales que estudiamos. Sin embargo destacamos que todas logran focalizaciones más que razonables, pues anchos focales, espacialmente, del orden de 10 mm equivalen a dos nodos espaciales en nuestra simulación, de lo cual concluimos que si bien es un factor a tener en cuenta, no resulta crítico para mejorar la focalización. Esto mismo vale para la focalización temporal, donde la distancia entre nodos temporales es  $\Delta t = 2.5$  ms

No está de más aclarar porque elegimos una señal que a priori parecería extensa, 7 nodos temporales, cuando habíamos mencionado en I que suele ser deseable emplear señales lo

más breves posible. Elegimos 7 nodos temporales para poder, debido a la discretización, darle a la señal inicial un aspecto similar a la función teórica que buscábamos imponer. Con una cantidad menor de nodos, esto habría sido imposible.

Como hemos dicho, otro aspecto de interés a estudiar es la duración del pulso inicial, que se vincula estrechamente con el ancho de banda de su espectro. Con este fin, manteniendo fijo el tiempo de adquisición modificamos el tiempo de emisión de la señal inicial (para este caso empleamos una ventana rectangular por simplicidad), que denominaremos  $T_f$ , variándolo entre 1 y 15 pasos temporales, que para nuestro caso implica un rango de valores para  $T_f$ : [2.5 ms, 37.5 ms]. Si bien en la sección I mencionamos que óptimamente el pulso inicial debería ser lo más breve posible, de forma de tener un aspecto similar a un  $\delta(t - t_0)$ , como trabajamos con una discretización del espacio y el tiempo, observamos que los mejores resultados no ocurren para el caso de una señal inicial de un único paso temporal. Vemos este y otros resultados en la figura 8.

Podemos ver que efectivamente la mejor focalización se obtiene para un tiempo de emisión que corresponde a 5.0 ms o equivalentemente dos nodos temporales. El resultado corresponde a una cavidad con forma de toro cuadrado, pero en pruebas con otras geometrías relativamente sencillas - por ejemplo un billar de Sinai, un cuadrado sin una esquina y un círculo al que le cortamos una sección - obtuvimos resultados muy similares, por lo que suponemos que el resultado aplica a la mayoría de los casos de interés. En la teoría esperábamos ver que cuanto más breve fuera la señal, mejor fuese la focalización; sin embargo, podemos ver que el mínimo tiempo posible con este algoritmo, 1 nodo temporal, no da el mejor resultado. ¿A qué puede deberse esto? Como trabajamos con una discretización, y en particular, disponemos de una cierta frecuencia de muestreo, impuesta por  $\Delta t$  el tiempo entre iteraciones, solo podemos registrar un número acotado de frecuencias, y por ende, al utilizar una señal inicial " $\delta(t)$ " tenemos presentes solo estas frecuencias, y con una amplitud reducida; a lo cual se le suma el error de truncamiento del método de diferencias finitas, lo cual genera que el ruido propagado sea relevante respecto a la onda. En cambio, con señales ventana, hay un lóbulo principal de su espectro con una amplitud importante, lo cual mejora la calidad de focalización como podemos ver.

### III-C. Distancia del sensor puntual al punto de focalización

Un factor clave al momento de llevar este método de focalización al laboratorio es tener conocimiento sobre cómo afecta la distancia de los sensores al punto de focalización. Para ello, colocando el punto de focalización en una posición arbitraria de la cavidad y emitiendo una señal cuadrada de 0.005 s tomamos datos con un sensor puntual. Registramos datos durante un tiempo  $T = 25$  s. Variamos la distancia entre el sensor y el punto de focalización alejando el sensor de a 1 pasos espacial hasta alcanzar el final de la geometría y empezando a una distancia de 5 nodos. Podemos ver en la figura 9 los resultados de la focalización espacial y la temporal para varias distancias.

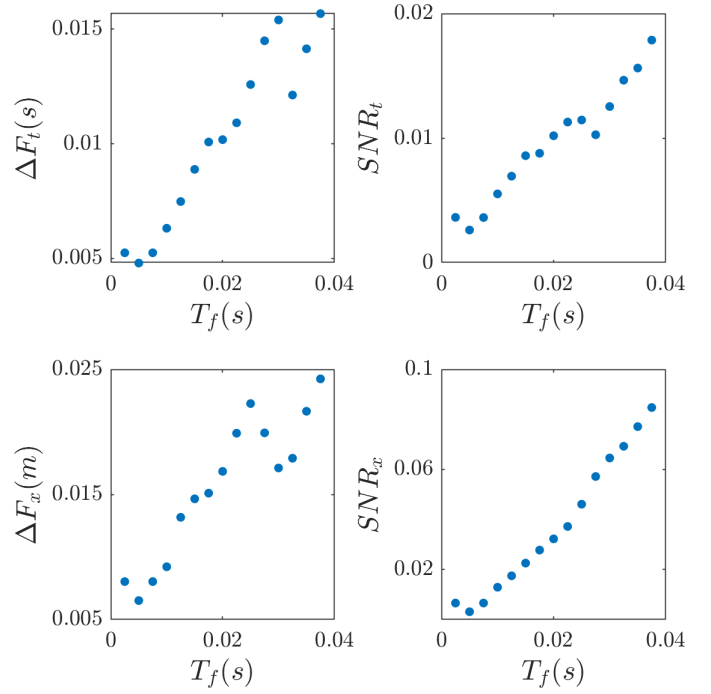


Figura 8: Valores del ancho focal de la intensidad, tanto temporal  $\Delta F_t$  como espacialmente  $\Delta F_x$ , así como la relación del pico de intensidad respecto a los lóbulos secundarios,  $SNR_t$  y  $SNR_x$ , a medida que aumentamos la duración del impulso inicial emitido desde la posición de focalización medida en nodos temporales

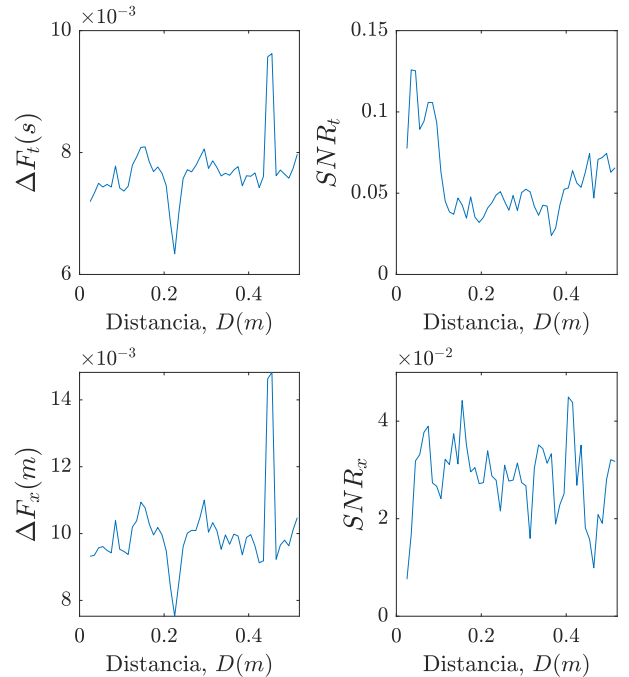


Figura 9: Datos de ancho focal y relación SNR, a medida que aumentamos la distancia  $D$  entre el sensor y la fuente. Representamos en continuo los datos para mayor claridad.



Notamos claramente como la calidad de la focalización es afectada por la distancia del sensor. En cuanto al ancho focal observamos que existe una distancia óptima en la cual esta medida se hace significativamente menor respecto a las otras distancias. Dicho lugar se encuentra alrededor de la mitad de la distancia entre el foco y el borde de la cavidad. Observamos que esta distancia, en base a simulaciones con diferentes cavidades o puntos de focalización, depende fuertemente de los parámetros del problema, tales como la geometría y la posición de la fuente. Notamos un pico importante del ancho focal algo más lejos de la fuente, que asociamos a alguna característica geométrica, pues en simulaciones con otras cavidades, no aparecía tan marcadamente, o aparecían más de uno. Que el ancho focal empeore cuando el sensor se encuentra muy cerca del foco, entendemos que se debe a que la distancia entre ambos no es suficiente para que las ondas con diferentes frecuencias tengan un desfase lo suficientemente importante al alcanzar las zonas en el entorno del punto de focalización. Debido a esto, la interferencia no fue suficientemente destructiva, y observamos un mayor ancho focal.

Por otra parte, no encontramos una relación clara entre la distancia variada y el valor de la relación SNR. En diferentes tomas de datos, variando la geometría y la posición de la fuente observamos que dicha relación depende fuertemente de estos parámetros, a diferencia del ancho, cuyo comportamiento general - con una distancia óptima- se preserva. Por lo tanto, consideramos que el principal efecto que conlleva variar la distancia entre el foco y el sensor, es la posible disminución del ancho focal si encontramos la distancia óptima mencionada. Nuevamente debemos aclarar que dicha distancia óptima depende fuertemente de los otros parámetros del sistema por lo que no es claro a priori cual es la distancia a utilizar. En resumen, consideramos que este no es un factor clave para lograr una focalización de alta calidad siempre en cuando no nos encontremos demasiado cerca del foco. Estudiando cada problema en particular podremos encontrar la distancia óptima para lograr el mínimo en el ancho focal.

### III-D. Arreglos lineales de fuentes puntuales

Luego de analizar los factores anteriores, nos podemos preguntar que sucede si utilizamos  $N$  sensores para registrar la señal en la etapa de emisión. En base a otros trabajos, esperamos que aumentar el tamaño del espejo mejore la focalización[8]. Utilizamos una señal impulsional de  $0,005$  s y registramos datos por  $12$  s. En la etapa de inversión temporal tendremos el mismo número de emisores por lo que la intensidad en el punto de focalización debería crecer con  $N$ . Así, agregamos sensores de a uno hasta llegar a formar un arreglo de 20 sensores puntuales formando un “espejo” de inversión en la posición 1, tal como se muestra en la figura 10.

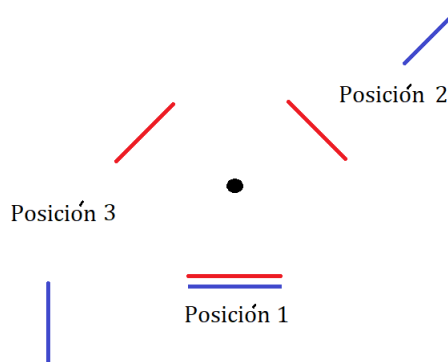


Figura 10: En negro, punto de focalización. En rojo, configuración simétrica para los espejos utilizados. En azul, una de las configuraciones no simétricas. Se estudiaron varias disposiciones especiales de los espejos tal como se muestra en el diagrama. Cada espejo tiene  $N$  sensores distanciados por un paso espacial

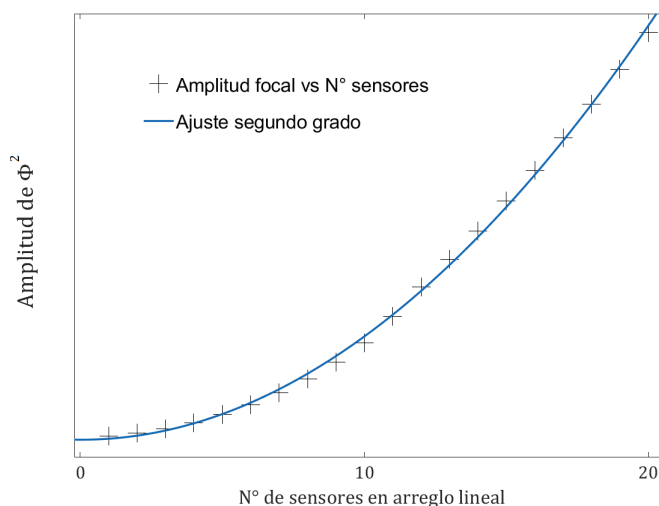


Figura 11: Relación entre la amplitud del campo al cuadrado contra el número de sensores en un espejo de inversión temporal. Tal como se esperaba, la amplitud focal crece como un polinomio de segundo grado.

Registramos los valores de máxima amplitud en el punto de focalización a medida que agregamos sensores, los resultados se muestran en la figura 11. Conforme a lo que esperábamos, a medida que agregamos más puntos, la amplitud del campo al cuadrado crece como un polinomio de segundo orden. Además de esto, podemos analizar los factores de calidad de la focalización. En particular, si observamos la ecuación (7), parece razonable suponer que el “ruido aleatorio” del campo, de ser realmente aproximadamente aleatorio, crezca como  $\sqrt{N}$ . En consecuencia, cuando estudiemos el cuadrado del campo, esperaríamos observar un crecimiento lineal del ruido, un orden menor que el pico de focalización. En cuanto al ancho de focalización, si bien no es tan sencilla la teoría, cualitativamente esperaríamos que disminuya y tienda a un valor asintótico. Los resultados obtenidos para distintos  $N$  se

muestran en la figura 12. En simulaciones con una mayor cantidad de fuentes, observamos que la disminución del ancho focal se estabiliza para valores mayores a  $N = 25$  y comienza a oscilar en torno a un valor límite. Por otro lado, vemos que los lóbulos secundarios del campo  $\phi$  crecen tanto espacial como temporalmente. Sin embargo, lo hacen más lentamente que el pico de focalización. La forma que sigue dicho crecimiento, nuevamente parece ser proporcional a  $\sqrt{N}$ ; y por ende la relación SNR para la intensidad debería decrecer como  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ . Superponemos los ajustes obtenidos en la figura 12. En particular para el caso temporal, un ajuste de este tipo presenta un  $r^2 = 0,98$ , lo cual apoya nuestra suposición en este sentido. Para los lóbulos secundarios de la focalización espacial, el resultado es menos satisfactorio,  $r^2 = 0,88$ . Para cantidades mucho mayores de fuentes, hicimos solo algunos ensayos por limitaciones de capacidad, pero observamos que el ancho focal se estabiliza y oscila en torno a un valor mínimo, mientras que la relación SNR disminuye algo más, pero el mayor descenso se produce al agregar los primeros sensores.

Por otro lado, estudiamos distintas configuraciones de los espejos, primero analizamos los datos obtenidos colocando un espejo en cada una de las tres posiciones que se muestran en color rojo en la figura 10. Debido a la simetría de la cavidad rectangular, los resultados obtenidos fueron los mismo para los espejos en las 3 posiciones. Luego de esto, colocamos dos y tres espejos de 10 sensores cada uno. Mostramos los resultados en la tabla II.

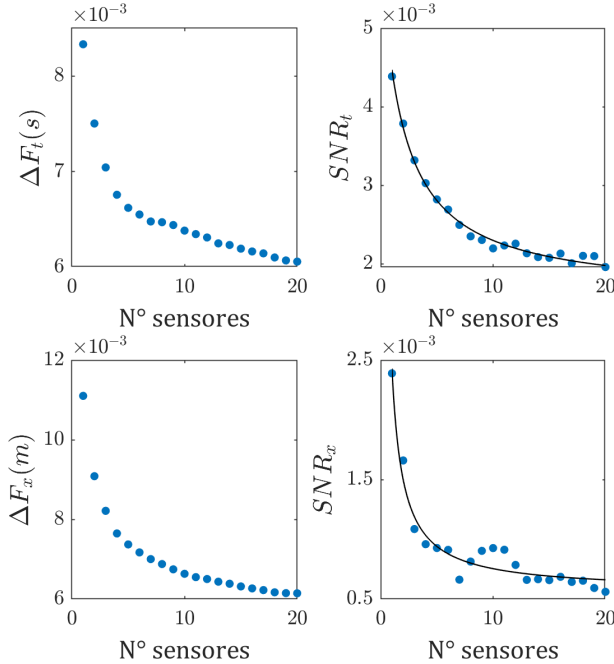


Figura 12: Valores del ancho focal de la intensidad temporal ( $\Delta F_t$ ) y espacial ( $\Delta F_x$ ) y de la relación entre el pico de intensidad respecto a los lóbulos secundarios,  $SNR_t$  y  $SNR_x$ , para distintos números de sensores en el arreglo. Superponemos el ajuste de las curvas de SNR.

N° espejos	Relación $SNR_x$	Ancho focal $\Delta F_x$
1	0.331	$0,0193 \pm 0,0025$
2	0.669	$0,0350 \pm 0,0025$
3	0.605	$0,0500 \pm 0,0025$

Tabla II: Parámetros para analizar la focalización con configuraciones de espejos en las posiciones mostradas en la figura 10. Observamos que debido a la simetría de la disposición la calidad de la focalización empeora a medida que agregamos mas espejos.

A partir de este pequeño estudio parece ser que mientras que espejos con mayor N mejoran la calidad de focalización, un numero mayor de espejos ubicados de la forma dispuesta empeora la focalización, al menos con los parámetros trabajados hasta el momento. Debido a que la disposición roja en la figura 10 tiene alta simetría, decidimos colocar los 3 espejos de inversión de forma aleatoria a lo largo de la cavidad. La nueva disposición se muestra en color azul en la figura 10.

De forma contraria a la disposición con alta simetría, observamos en los resultados presentados en la tabla III que el agregado de un segundo espejo mejora notablemente la calidad de la focalización. Vemos además que al agregar el tercer espejo de forma diametralmente opuesta la calidad de la focalización se mantiene estable, esto se lo atribuimos a un aumento en la simetría de la disposición de los espejos. Además de las dos disposiciones estudiadas, configuramos algunas otras, tanto con alta simetría como no y llegamos a resultados similares.

N° espejos	Relación $SNR_x$	Ancho focal $\Delta F_x(m)$
1	0.347	$0,2150 \pm 0,0025$
2	0.005	$0,0145 \pm 0,0025$
3	0.00153	$0,0189 \pm 0,0025$

Tabla III: Parámetros para analizar la focalización con los espejos colocados en la disposición no simétrica mostrada en la figura 10. Contrariamente al caso simétrico, observamos como un segundo espejo de forma no simétrica aumenta la calidad de la focalización

### III-E. Ángulo del espejo

Un detalle no menor a considerar cuando extendemos un sensor puntual a un arreglo de los mismos es tener en cuenta con qué ángulo se enfrenta el espejo respecto al punto de focalización. Partiendo de un pulso cuadrado de  $0,005 s$  tomamos datos por  $12 s$  con un espejo formado por 10 sensores puntuales a una distancia prudente del punto de focalización<sup>6</sup>. Así, observamos la focalización resultante para varios ángulos. Presentamos los resultados obtenidos en la tabla IV.

<sup>6</sup>Ni muy cerca del foco ni muy cerca de los bordes de la región, debido al comportamiento que estudiamos en la sección III-C

Ángulo	$SNR_x$	$\Delta F_x (m)$
0	0.105	$0,0124 \pm 0,0025$
$\frac{\pi}{4}$	0.867	$0,1040 \pm 0,0025$
$\frac{\pi}{2}$	0.974	$0,0650 \pm 0,0025$

Tabla IV: Parámetros que reflejan la calidad de la focalización para distintos valor del ángulo al que se enfrenta el espejo. Como se explica en el cuerpo del texto, estos resultados no son concluyentes.

En esta serie de medidas, la configuración por la cual obtenemos mejores resultados es el espejo perpendicular al punto de focalización. Estos resultados contradicen lo esperado, deberíamos observar una mejor focalización en el caso en que el ángulo vale  $\pi/2$ , esto se debe a que en este caso existen muchas direcciones para las cuales las ondas (directas) llegan al punto de focalización mientras que en el caso de ángulo 0 solo existe una. Es verdad que en ambos casos llegan ondas reflejadas de muchas mas direcciones pero las ondas directas llegan con mayor amplitud al foco, debido a esto deberíamos observar resultados distintos a los presentados en la tabla. Luego de analizar el efecto del ángulo para distintas posiciones en la región y distintas distancias entre el foco y el espejo observamos que el resultado obtenido se repite. Debemos tener en cuenta que estas medidas dependen en gran medida de las posiciones tanto del punto de focalización como del espejo de inversión. Cuando variamos el ángulo, las distancias entre los sensores cambia significativamente, mientras que en la disposición con ángulo 0 tenemos algunos sensores muy cercanos al foco, en el arreglo con ángulo  $\pi/2$  todos los sensores se encuentran mas lejos. Esta relación depende además del largo del espejo, para N grandes este efecto es mas notorio. Debido a esto, los resultados en la tabla anterior se ven fuertemente sesgados por las distancias variantes al cambiar el ángulo. Para analizar en detalle como el ángulo afecta a la calidad de focalización deberíamos encontrar una zona a cierta distancia del punto de focalización en la cual el cambio de distancias no afecte significativamente al resultado, para ello se necesitarían distancias mucho mas grandes que las que podemos conseguir con el numero de pasos espaciales trabajados (del orden de 200). Debido a esto, no pudimos llegar a una conclusión clara sobre el efecto del ángulo del sensor.

### III-F. Variaciones en la geometría de la cavidad

Como hemos venido mencionando, la geometría de la cavidad es de gran relevancia para el proceso de focalización por inversión temporal, pues juega un rol clave en la aleatoriedad de las señales recibidas. En vistas de esto, en esta sección analizamos de forma directa la calidad de la focalización obtenida en función de la geometría de la cavidad. Para ello, en idéntica posición de fuente y sensor, comparamos los resultados para un conjunto de geometrías.

En la figura 13 presentamos las geometrías estudiadas; la geometría más simple consiste en la cavidad cuadrada, sin incluir irregularidades, a la que luego le eliminamos una esquina, un cuadrado central, ambos, y un círculo central.

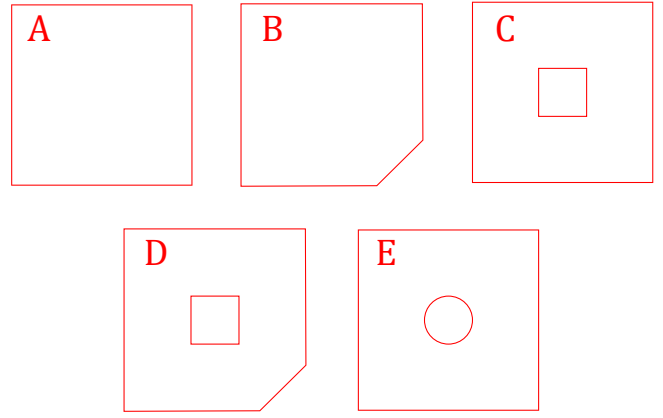


Figura 13: Diagramas de las cavidades que estudiamos para analizar la influencia de la geometría en la calidad de focalización.

Geometría	$SNR_t$	$\Delta F_t (ms)$	$SNR_x$	$\Delta F_x (mm)$
A	0.0051	$7.6 \pm 1.3$	0.0154	$9.4 \pm 2.5$
B	0.0066	$7.7 \pm 1.3$	0.0018	$9.2 \pm 2.5$
C	0.0058	$6.7 \pm 1.3$	0.0029	$8.0 \pm 2.5$
D	0.0039	$7.3 \pm 1.3$	0.0019	$9.4 \pm 2.5$
E	0.0087	$7.6 \pm 1.3$	0.0029	$9.4 \pm 2.5$

Tabla V: Valores para el ancho focal  $\Delta F$  así como la relación SNR para la intensidad del campo, tanto espacial como temporalmente, para diferentes señales iniciales  $e(t)$ .

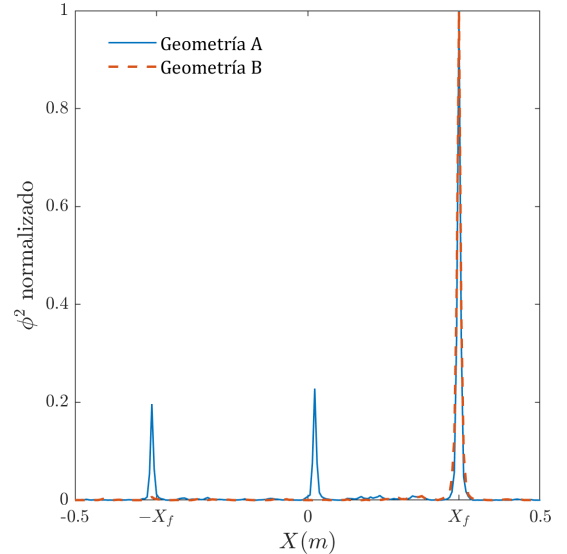


Figura 14: Cuadrado del campo  $\phi$  normalizado, en función de la posición  $x$ , para las geometrías A y B, en el instante de focalización. Notamos que para A existe un pico en la posición simétrica a la de focalización,  $X_f$ , así como uno cercano a 0.

Una primer observación que destacamos, es la presencia de un pico secundario, en una posición simétrica a la de focalización, para el caso de la geometría A. Esto explica el amplio valor para la relación  $SNR_x$  que observamos para dicha geometría. El mencionado lóbulo secundario desaparece

conforme disminuye el grado de simetría de la situación, y no lo notamos en ninguna de las otras configuraciones. De los resultados que observamos en la tabla V, notamos que si bien las variaciones en el ancho de la curva no son relevantes, sí lo es la disminución en la altura del lóbulo secundario espacialmente. Por otro lado, notamos que la relación  $SNR_t$  no es especialmente sensible a la geometría de la cavidad, pues su valor oscila con los cambios.

Entendemos que las diferencias en la focalización espacial se vinculan con la sencillez para establecer modos normales de cada cavidad. A medida que el medio en la cavidad comienza a vibrar y las ondas acústicas la recorren, se comienzan a producir ondas estacionarias, las cuales producen una disminución en la energía de las ondas viajeras, reduciendo la calidad de focalización. Además, si eventualmente alguno de estos modos posee un nodo próximo al punto de focalización, su aporte será prácticamente nulo. Al emplear geometrías complejas, los tiempos para los cuales se establecen los modos normales de vibración aumentan, por lo cual, para un mismo tiempo de adquisición notamos mejores resultados.

### III-G. Presencia de inhomogeneidades en la cavidad

Notando que la calidad de la focalización es afectada por la aleatoriedad de caminos de las ondas tanto directas como reflejadas, nos proponemos estudiar cómo afecta a la focalización la presencia de inhomogeneidades en la cavidad. Para ello empleamos una cavidad cuyas propiedades  $c$  y  $\rho$ , no son constantes en el espacio. Su distribución se puede ver en la figura 15.

En este caso utilizamos la ecuación 14 para el método de diferencias finitas. Los parámetros que empleamos son  $c_1 = 1\text{ms}^{-1}$ ,  $\rho_1 = 1\text{Kgm}^{-3}$ ,  $c_2 = 1,5\text{ms}^{-1}$ ,  $\rho_2 = 0,5\text{Kgm}^{-3}$ . En base a resultados anteriores, utilizamos una señal ventana de 2 nodos temporales, y un sensor en la posición  $S$ . Con motivo de tener un resultado de control, simulamos la misma situación pero con los valores uniformes del medio 1 en toda la cavidad. Colocamos el sensor en las posiciones  $S$  y  $S'$  con fin de analizar si el resultado obtenido depende de si el sensor se encuentra en la misma región que  $F$ . Los resultados se pueden ver en la figura 16.

Observando la figura podemos ver como al colocar el sensor en el mismo medio que el foco ( $S$ ), la relación  $SNR$  disminuye respecto al caso homogéneo, mientras que el ancho focal se mantiene igual. Esto es esperable ya que el agregar una frontera a la cavidad implica la presencia de ondas reflejadas, además de las que se transmiten entre medios y luego regresan, que aportan a que el campo resultante en la zona circundante a  $F$  sea menor. A su vez, las ondas directas que poseen la mayor amplitud no necesitan atravesar una frontera para llegar a  $S$ . Al colocar el sensor en  $S'$ , las ondas emitidas luego de la inversión viajan de una zona de menor impedancia a una de mayor, y debido al fenómeno de transmisión su intensidad es menor, que se traduce en un menor valor del el máximo del campo en  $F$ . Para estudiar la coherencia de estas conclusiones, replicamos la situación con el sensor en  $S$ , pero cambiando los valores de  $c_1$  y  $\rho_1$  con los de  $c_2$  y  $\rho_2$ . De esta forma, las zona

en la que se encuentran  $F$  y  $S$  es la menor impedancia acústica  $Z_0 = c\rho$ . Como se puede ver cualitativamente en la figura 17, la focalización mejora si tanto el sensor como la fuente se hallan en el medio de mayor velocidad. Entendemos que una posible explicación de este fenómeno se puede vincular a que, al incidir las ondas sobre la interfase que separa ambos medios, si se hace del medio con menor velocidad al de mayor, es posible que se observe el fenómeno de reflexión total interna[9]. Esto conlleva a que, producto del cambio de impedancia, solo se registren ondas reflejadas. Si no sucede el fenómeno de reflexión total interna, parte de la onda se transmite al otro medio, se refleja en los bordes y regresa al medio inicial, aportando nuevas ondas, luego mejorando la aleatorización de la diferencia de fases de las ondas en las cercanías del punto de focalización.

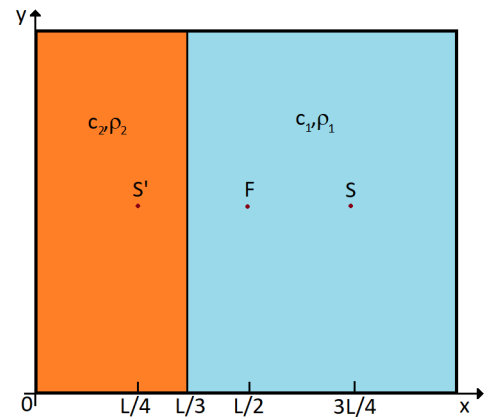


Figura 15: Esquema de la cavidad cuadrada, y la disposición de las zonas con distintos valores de  $c$  y  $\rho$ .  $F$  representa el punto donde se busca la focalización,  $S$  y  $S'$  dos posibles localizaciones para el sensor, una de ellas en el mismo medio que  $F$ .

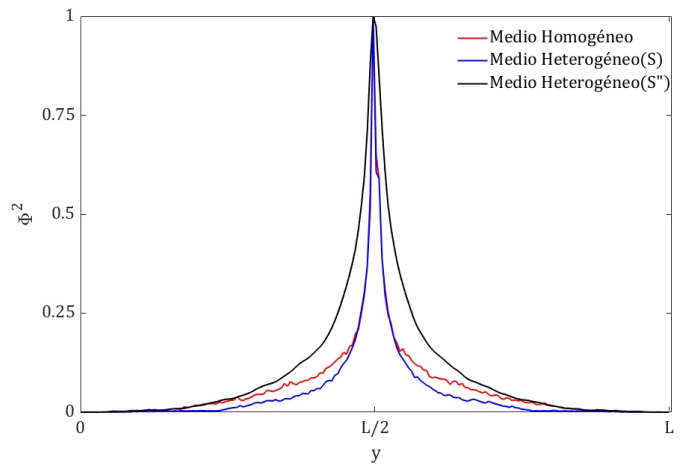


Figura 16: Valor de  $\phi^2$  normalizado, en función de la distancia  $y$  perpendicular a la dirección de cambio de medio, durante el instante de focalización. En rojo se muestra el caso en el que las constantes del medio son uniformes en la cavidad. En azul, el caso mostrado en la figura 15, con el sensor ubicado en  $S$ , y en negro, la misma simulación con el sensor ubicado en  $S'$ .

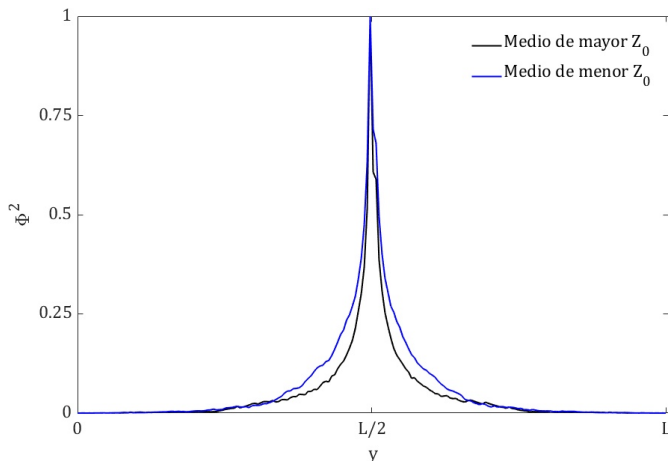


Figura 17: Valor de  $\phi^2$  normalizado, en función de la distancia  $y$  perpendicular a la dirección de cambio de medio, durante el instante de focalización. En azul, se muestra el caso en el que  $F$  y  $S$  se encuentran en la región de mayor impedancia  $Z_0$ , mientras que en celeste los mencionados puntos se encuentran en la región de menor impedancia.

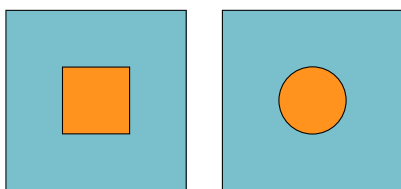


Figura 18: Esquema de la cavidad que empleamos para el último estudio de la influencia de inhomogeneidades en la focalización.

Por otra parte, nos proponemos estudiar casos en los que las geometrías de las regiones no son las anteriores, sino que poseen la disposición que representamos en la figura 18. Entendemos que esta simulación es interesante pensando por ejemplo, en aplicaciones en tratamientos que buscan destruir tejidos con diferentes propiedades a las de las zonas circundantes, como podría ser un tumor. Teniendo en cuenta los resultados discutidos en esta sección, se colocó en ambos casos el sensor  $S$  en la misma región que  $F$ , y se utilizaron las mismas constantes que en la simulación anterior, de modo que la región central que contiene a  $S$  y  $F$  sea la de mayor impedancia.

Como podemos ver en los resultados de la tabla VI, estas configuraciones presentan una calidad de focalización ligeramente mejor que el caso homogéneo. Particularmente, siempre que se pueda colocar el sensor en el mismo medio que  $F$ , notamos que es favorable el tener inhomogeneidades en la cavidad. Nótese que en estas simulaciones se utilizó solo un sensor, así como un tiempo de adquisición relativamente corto en términos de los resultados de la sección III – A. Por lo tanto, si no fuera posible cumplir esta condición sobre  $S$  y  $F$ , el método continúa siendo útil, pero a un mayor costo instrumental.

Caso	$SNR_x$	$\Delta F_x$ (mm)
Medio Homogéneo	0.1608	$15.0 \pm 2.5$
Regiones Rectangulares	0.0892	$15.0 \pm 2.5$
Región Cuadrada	0.1545	$10.0 \pm 2.5$
Región Circular	0.1374	$15.0 \pm 2.5$

Tabla VI: Valores para el ancho focal  $\Delta F$  así como la relación  $SNR$  para la intensidad del campo, en distintas situaciones. Regiones rectangulares se refiere al caso de la figura 15, mientras que región cuadrada y circular los de la figura 18.

#### IV. DISCUSIÓN

Presentamos los resultados del estudio del fenómeno de focalización por inversión temporal en una cavidad bidimensional. A lo largo del presente informe estudiamos diversos factores que influyen en la calidad de la focalización, que medimos en función de la relación señal-ruido de las curvas de focalización y el ancho de las mismas. Como un primer comentario general sobre el trabajo, queremos aclarar que cuando registramos numéricamente los valores del pico principal y los lóbulos secundarios, no incluimos una incertidumbre, por ser relativamente difícil de estimar en un método de diferencias finitas, además de no poseer excesivo valor, tratándose de una simulación. Para los valores de ancho focal, empleamos una interpolación lineal, y consideramos que en general una incertidumbre razonable es la mitad de la distancia entre nodos temporales,  $\Delta t/2$ , para  $\Delta F_t$  y análogamente,  $\Delta x/2$  para  $\Delta F_x$ .

Los factores que estudiamos fueron el tiempo de adquisición, la forma del impulso inicial y su duración, la variación en arreglos de sensores y espejos (tales como distancia sensor-foco, tamaño del espejo, ángulo del espejo y variaciones en la forma del arreglo), variaciones en la geometría de la cavidad y presencia de inhomogeneidades en la misma.

En cuanto al estudio en las variaciones del tiempo de adquisición observamos que el valor del campo en la posición e instante de focalización crecen de forma lineal con el tiempo de adquisición, como de pone de manifiesto en la figura 4, para tiempos de adquisición de hasta 50s. Este resultado lo explicamos a partir de nuevas ondas producto de reflexiones que recibe el sensor y que aumentan conforme se adquiere más tiempo; las mismas interfieren constructivamente incrementando el pico de focalización. A su vez, estudiamos la relación señal ruido bajo las mismas variaciones y observamos que, para tiempos del orden mencionado, crece linealmente para la intensidad del campo.

Por otro lado, para tiempos largos el sensor deja de recibir nueva información, dejan de crecer tanto la calidad de la focalización como el valor del pico. Existe por tanto un tiempo óptimo para el cual se logra la mejor calidad, para tiempos posteriores al mismo el incrementar el tiempo de adquisición no produce mejoras notables y deja de ser rentable. Pudimos observar que dicho tiempo se vincula a la geometría de la cavidad, por lo que en la práctica debería realizarse un par de pruebas para poder estimarlo, antes de realizar aplicaciones de la técnica. Entendemos que es un aspecto interesante, y que es probable que pueda obtenerse información de la geometría



mediendo el tiempo de adquisición característico  $T_c$ , pero no profundizamos más en el tema por acotarnos a nuestro objetivo principal.

El segundo aspecto que estudiamos, que también es de sencilla modificación pensando en una aplicación práctica, son las características de la señal  $e(t)$  emitida por la fuente en el punto donde deseamos focalizar posteriormente. Pudimos observar que, para simulaciones por diferencias finitas, el mejor resultado corresponde a una señal con una duración de dos nodos temporales - que en la práctica se sigue traduciendo a una señal de tipo  $\delta(t)$ . Debido al hecho de discretizar el tiempo, y por ende limitar las posibles frecuencias presentes, la utilización de una  $\delta(t)$  no es óptima para simulaciones del estilo que presentamos en este trabajo, pero si lo sería en una aplicación práctica - esto es, es óptimo un pulso lo más breve posible. En cuanto a su forma, de acuerdo a los resultados que obtuvimos en algunas geometrías sencillas, según lo que presentamos en la tabla I, el mejor resultado lo proporciona medio ciclo de senoide, de entre las señales que analizamos, mas no era demasiado diferente a los demás resultados. En definitiva, para la práctica, destacamos que el mejor resultado se logra con una señal lo más breve posible, y, en menor medida, de forma de medio ciclo de senoide.

Respecto a los espejos, profundizamos en la influencia de su ubicación, orientación y tamaño. En primer lugar, analizamos de qué forma afecta a la focalización la distancia entre el espejo y la fuente. Pudimos observar, en la figura 9, que existe una distancia intermedia donde el ancho focal es mínimo; por otro lado vimos que el variar la distancia no afecta de forma clara la relación SNR. También comprobamos que la mencionada distancia intermedia depende de la situación concreta - geometría, posición de la fuente - por lo que en la práctica debería determinarse de forma previa, realizando algunas pruebas.

En cuanto al tamaño del espejo, la cantidad  $N$  de sensores que lo componen, pudimos observar que en general al aumentar su número, mejoran tanto el ancho focal como la relación entre el pico y los lóbulos secundarios. Notamos que el ancho focal, de todos modos, no mejora notoriamente para  $N \geq 25$ , y asimismo pudimos ver la relación SNR, tanto espacial como temporalmente, disminuye de forma proporcional a un factor  $\frac{1}{N}$ , por lo cual concluimos que empleando una cantidad de sensores muy elevada no logramos una mejora significativa - lo que pueda mejorar la relación SNR -, para  $N$  grandes no es relevante; mientras que con cada nuevo sensor, debemos reservar más memoria para el registro y en la práctica se requerirían más sensores o uno de mayor tamaño. Por ejemplo, para nuestra simulación, un número razonable parece ser del orden de 25,30 sensores, que corresponde a un espejo de inversión temporal de unos 15 cm para cavidades de dimensiones del orden del metro cuadrado.

Además de esto, analizamos que sucede al colocar varios espejos como los trabajados hasta ese momento. Observamos que si la disposición de los espejos es simétrica en torno al foco, la calidad de la focalización empeora; mientras que si la disposición de los espejos no sigue una simetría clara

los resultados mejorar notoriamente. Parte de dicha mejoría se la podemos atribuir nuevamente al aumento en el número de sensores ya que al colocar aun mas espejos se dejó de notar un cambio significativo. Como ultimo estudio de esta sección, estudiamos que sucede al variar el ángulo de espejos de inversión. No logramos determinar efectos determinantes de este parámetro debido al cambio grande que se produce en las distancias sensor-foco al variar el ángulo para tamaños de sensores y cavidad trabajados. Sería interesante en un estudio futuro poder profundizar en este aspecto limitando la influencia de la distancia mencionada.

En el apartado III-F analizamos como varían los resultados del proceso exclusivamente en función de la geometría de la cavidad. Notamos que si bien espacialmente, para tiempos suficientemente largos no hay mayores diferencias, espacialmente es muy importante no disponer de geometrías con alto grado de simetría. Notamos que si no es así, probablemente vinculado al establecimiento de modos normales, se obtienen picos importantes en posiciones simétricas al punto de focalización, que en la práctica podrían no ser deseables. Introduciendo ligeras modificaciones a la geometría simétrica inicial, cuadrada, como sacarle una esquina, los resultados mejoraron considerablemente. Entendemos que en situaciones experimentales la geometría muchas veces está impuesta de forma incontrolable por el objeto de estudio, pero de no ser así, recomendamos seleccionar geometrías con bajo grado de simetría, o que presenten propiedades caóticas.

En cuanto a la presencia de inhomogeneidades en el medio, observamos como es posible obtener una mejora en la calidad de focalización, mientras sea posible colocar el sensor en la misma región que el punto de focalización. A su vez, es preferible que esta región sea la de mayor impedancia acústica y en particular la de mayor velocidad, debido a los fenómenos de transmisión. Creemos que fenómenos de reflexión total interna puede afectar negativamente la focalización. En cambio, si garantizamos que esto no sucede, colocando la fuente y el sensor en la región de mayor velocidad, los resultados mejoran respecto al caso homogéneo. Buscando simular situaciones menos ideales, estudiamos cavidades con regiones centrales diferentes (figura 18), obteniéndose resultados de menor calidad, pero de órdenes similares, por lo que no descartamos completamente la utilidad del método en estos casos.

Procedemos ahora como cierre a resumir lo que consideramos la mejor configuración de parámetros:

1. Duración de la ventana temporal  $T$ : notamos que existe un valor finito que maximiza la calidad de focalización. Para tiempos mayores no hay mejoras significativas.
2. Señal inicial  $e(t)$ : es óptimo emplear una señal de la menor duración posible, y de entre las formas funcionales testeadas, la mejor resulta ser un medio período de seno
3. Distancia fuente-sensor: no notamos que afecte de manera significativa la relación SNR, pero observamos existencia de una distancia intermedia donde se minimiza el ancho focal



4. Tamaño y disposición del espejo: observamos que para números de sensores mayores a 20, el ancho focal apenas varía, mientras que la relación SNR decae como  $1/N$ . Concluimos que utilizar aproximadamente 25 sensores maximiza la relación beneficio/costo. Si se utilizan varios espejos lo mejor es colocarlos en una disposición poco simétrica respecto al punto de focalización.
5. Geometría de la cavidad: corroboramos que geometrías con alta simetría tienden a generar lóbulos secundarios con valores importantes. Resulta útil trabajar con geometrías de baja simetría, que no establezcan modos normales
6. Presencia de inhomogeneidades: independientemente de la geometría de las inhomogeneidades, se maximizan los factores de calidad al colocar el sensor y punto de focalización en el mismo medio, siendo este el de mayor impedancia

De cara a futuros trabajos de profundización, consideramos que hay dos aspectos principales para analizar. Por un lado, profundizar en varias de las áreas que mencionamos en este trabajo, pero en las que no profundizamos, como por ejemplo la incidencia de la geometría en el tiempo de adquisición óptimo, los beneficios del empleo de geometrías caóticas, la incidencia de las inhomogeneidades en casos menos sencillos. Por el otro, extender este trabajo a una cavidad tridimensional sería de gran utilidad pensando en aplicaciones prácticas - si bien puede ser de interés realizar experimentos sobre cavidades 2D - es más plausible que sea necesario trabajar en espacios de tres dimensiones.

## V. CONCLUSIONES

En este artículo estudiamos la focalización de ondas mediante la técnica de inversión temporal. A partir del análisis de la calidad de la focalización - medida con dos parámetros: ancho focal y amplitud de lóbulos secundarios - pudimos estudiar la incidencia de diferentes factores, implícitos del método e impuestos externamente por las características del problema. En cuanto a los parámetros de la técnica de inversión temporal, observamos que el aumento del tiempo de adquisición en el paso inicial incrementa la calidad. Destacamos que podemos amplificar el pico de focalización tan solo aumentando el tiempo de adquisición. No obstante, notamos que existe un tiempo característico, propio de la geometría de la cavidad, tras el cual tanto la relación SNR como la amplitud de focalización dejan de mejorar. Por otro lado, en cuanto a la señal emitida por la fuente, observamos que la señal sinusoidal parece ser óptima, de entre las señales que estudiamos, con una relación *SNR* reducida; y que en aplicaciones prácticas el mejor resultado lo brinda una duración mínima del impulso.

Para los estudios sobre las disposiciones de sensores, destacamos que la distancia entre el sensor y la fuente debe ser media ya que una distancia pequeña reduce la posibilidad de focalización. A su vez incrementar el número de sensores en los espejos contribuye a mejorar la focalización, afinando la curva y disminuyendo el ruido. La intensidad de la focalización crece significativamente aumentando el

número de sensores y, en menor medida con el aumento del tiempo de adquisición. Sobre las características de la cavidad, analizamos las variaciones en su forma y en su homogeneidad, observando que la calidad difiere si variamos la geometría. En particular vimos que las geometrías simétricas contribuyen a la formación de modos normales, generando lóbulos secundarios muchas veces indeseables. Por otro lado, las inhomogeneidades, logradas variando la densidad en sectores del espacio en la cavidad, varían la calidad de la focalización, observándose distintas situaciones según las zonas donde se dispusieran la fuente y el sensor; en particular colocar ambos en el medio donde la impedancia acústica y la velocidad son mayores, parece dar mejores resultados, pudiendo explicarse el resultado a partir del fenómeno de reflexión.

A modo de conclusión general observamos que todos los factores tienen una influencia relevante en la calidad de la focalización, existiendo para algunos de estos valores óptimos que maximizan la relación entre calidad de focalización y costo de cambiar el parámetro. Este resultado podría tenerse en cuenta en miras de aplicaciones prácticas, donde potenciar alguna de las características puede tener costos o no ser posible. De todas maneras, si es necesario fijar un parámetro en algún valor no óptimo debido a agentes limitantes de la propia actividad experimental siempre podemos mejorar la focalización variando los restantes parámetros.

## REFERENCIAS

- [1] Nobel Media. *Wilhelm Conrad Röntgen – Biographical*. URL: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1901/roentgen/biographical>. (Acceso el 28/07/2020).
- [2] T. J. Dubinsky y col. “High-intensity focused ultrasound: current potential and oncologic applications”. En: *American journal of Roentgenology* 190 (2008), págs. 191-199. DOI: 10.2214/AJR.07.2671.
- [3] M Fink. “Time reversal of ultrasonic fields. I. Basic principles”. En: *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control* 39.5 (1992), págs. 555-566. ISSN: 0885-3010. DOI: 10.1109/58.156174. URL: <https://doi.org/10.1109/58.156174>.
- [4] Boschetti G. Cabrera S. Olivera N. y Pan N. “Propagación de ondas en una membrana por método de diferencias finitas”. En: (2020).
- [5] James W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. 1.<sup>a</sup> ed. 22. New York: Springer, 1995. ISBN: 978-1-4419-3105-4.
- [6] Carsten Draeger y Mathias Fink. “One-Channel Time Reversal of Elastic Waves in a Chaotic 2D-Silicon Cavity”. En: *Phys. Rev. Lett.* 79 (3 jul. de 1997), págs. 407-410. DOI: 10.1103/PhysRevLett.79.407. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.407>.
- [7] L. A. Bunimovich. “On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards”. En: *Comm. Math. Phys.* 65.3 (1979), págs. 295-312. URL: <https://projecteuclid.org:443/euclid.cmp/1103904878>.
- [8] Didier Cassereau y Mathias Fink. “Focusing with plane time-reversal mirrors: An efficient alternative to closed cavities”. En: *The Journal of the Acoustical Society of America* 94.4 (1993), págs. 2373-2386. DOI: 10.1121/1.407457. URL: <https://doi.org/10.1121/1.407457>.
- [9] Alan Coppins Lawrence Kinsler Austin Frey y James Sanders. “Fundamentals of acoustics”. En: 4.<sup>a</sup> ed. Nueva York, EUA: John Wiley sons, 2000. Cap. 6.